数理解析研究所講究録
380巻 1980年 144-161

$\Lambda(\mu,\sigma^2)$, $\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$ およびその他の分布におけるUMVU推定

東京理科大　理工　　清水　邦夫
東京理科大　理　　岩瀬　晃盛

§1　序

ある関数によって変換された変数が既知の分布に従うという場合が考えられる．特にその分布が正規の場合が，何人かの著者達によって取扱われた．この場合，応用上からも推定問題として考えるべきは，変換される前の分布のある特性値に関してである．

Finney [5] は，$X_1,\cdots,X_n$ が i.i.d. 母数 μ と σ^2 の対数正規分布（$\Lambda(\mu,\sigma^2)$ と書く）に従う場合に，X_i の平均値と分散の一様最小分散不偏推定量（UMVUEと略記）を求め，それらの分散の近似式を，平均に関しては，$1/n^2$ の項まで，また分散に関しては，$1/n$ の項までを求めた．

Bradu & Mundlak [3] は，同じ状況のもとで，母数 $\theta_{\alpha,\beta}\equiv\exp[\alpha\mu+\beta\sigma^2]$（$\alpha,\beta$ は実数）のUMVUEを求めた．$\theta_{\alpha,\beta}$ は，X_i の平均，Median，Mode および γ^2+1（γ は変動係数

）を含む．さらに彼らは，対数正規線型モデルについても考察した．例えば，full rank 対数正規線型モデル

$$y = X\alpha + u,\quad y = \begin{pmatrix} \log Y_1 \\ \vdots \\ \log Y_n \end{pmatrix},\quad X = (x_{ij}),\quad x_{ij} = \log X_{ij},\quad (i=1,\cdots n\,;\ j=1,\cdots,k)$$
$$u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

において，$\theta_{\gamma,\delta} \equiv \exp[\gamma\zeta + \delta\sigma^2]$ のＵＭＶＵＥとその分散を求めた．ここで，$\zeta = c'\alpha$ である．

その後，Mehran [10] は，$\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う random samples からの平均のＵＭＶＵＥの分散を正確に求め，Finney [5] による近似式との比較を行った。

Crow [4] は，平均が異なる２つの対数正規母集団を考え，平均の比のＵＭＶＵＥを求めた．

Aitchison & Brown [1] は，$\Lambda(\mu, \sigma^2)$ を一般化した母数 δ, μ, σ^2 をもつ Δ-分布（$\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ と書く）を考えた．すなわち，確率変数 Z が $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ に従うとは，

$$P(Z < 0) = 0\ ,\ P(Z = 0) = \delta,$$
$$P(Z \leqq z) = \delta + (1-\delta)\Lambda(z|\mu, \sigma^2),$$ $\Lambda(z|\mu,\sigma^2)$ は $\Lambda(\mu,\sigma^2)$ の分布関数

のことであり，$Z_1, \cdots, Z_n$ が i.i.d. $\Delta(\delta, \mu, \sigma^2)$ に従う確率変数のときの非零の個数を n_1 としたときの平均と分散のＵＭＶＵＥと，それらの分散の $1/n$ までの近似式とが求められた．

また，Neyman & Scott [11] は，second order entire ft. の逆関数によって変換された変数が正規分布に従う場合について

元の分布の平均のUMVUEを求めた．Hoyle[8]は，同じ状況のもとで，元の分布の分散のUMVUEを求めた．

本論文では，これまでの諸結果を，すべて超幾何関数に基づく方法で書換える．そのことにより，見通しが良くなり，新しい結果も得ることができる．特に，いくつかの母数のUMVUEの分散の表現が簡潔になる．

まず第2節では，UMVUEとその分散を求めるのに必要な量をあらかじめ計算しておく．第3節では，第2節の結果を使って，いくつかの場合に対してUMVUEとその分散を具体的に記述する．

Case 1は，Aitchison & Brown[1]によって取扱われた$\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$の場合である．彼らの分散の近似式の精度についても検討を行う．

Case 2は，Finney[5]によって取扱われた$\Lambda(\mu,\sigma^2)$の場合である．これは，$\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$において，$\delta=0$の場合に相当するので，Case 1の系として得られる．平均のUMVUEの分散の近似式については，既にMehran[10]が指摘しているように非常に良い．これは，$1/n^2$の項まで展開しているためであるが，分散のUMVUEの分散の近似式は，$1/n$の項まで展開していないためにあまり精度が良くないことが確かめられる．

Case 3 は，Bradu & Mundlak [3] によって取扱われた対数正規線型モデルの場合である．彼らは，exact variance を求めてはいるが，簡潔な式ではないように見える．我々は，それを超幾何関数を用いて表現する．このほうが簡潔と思われる．

Case 4 は，Crow [4] によって取扱われた2つの対数正規母集団の平均の比のUMVUEについて考える．彼は，Finney [5] による方法を踏襲しているため，表現が簡潔でなく，分散が求まっていない．我々は，それを書改める．

Case 5 は，Neyman & Scott [11] によって取扱われた変換された変数が正規分布に従う場合について考える．recursive type に限った場合に，元の分布の平均のUMVUEとその分散を超幾何関数を用いて表現する．

Case 6 は，$\Lambda(\mu, \sigma^2)$ の確率点のUMVUEを求める．この場合については，我々の方法では，分散式を簡潔には書下すことができない．

§2　UMVUEとその分散を求めるのに必要な量の計算

Finney [5] は，$\Lambda(\mu, \sigma^2)$ のP次モーメントのUMVUEを求めるのに，関数

$$g(t) = \frac{2^{f/2-1}\,\Gamma(f/2)}{\{if\sqrt{2t/(1+f)}\}^{f/2-1}}\, J_{f/2-1}\left\{if\sqrt{\frac{2t}{1+f}}\right\} \qquad (1)$$

を導入した．ここで，$J_\nu(z)$ は Bessel 関数（第一種円柱関数）であって，

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(z/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(\nu+j+1)} \qquad (z\neq\text{負の実数}) \qquad (2)$$

である．我々の方法では，Bessel 関数を超幾何関数で表現する公式を使って，

$$g(t)={}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2}{2(1+f)}t\right) \qquad (3)$$

と書いておく．ここで，超幾何関数の記法は，

$${}_0F_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!},\quad {}_0F_n(\beta_1,\cdots,\beta_n;z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta_1)_j\cdots(\beta_n)_j}\frac{z^j}{j!},$$

$${}_mF_0(\alpha_1,\cdots,\alpha_m;z)=\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_1)_j\cdots(\alpha_m)_j\frac{z^j}{j!},$$

$${}_mF_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\cdots,\beta_n;z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_j\cdots(\alpha_m)_j}{(\beta_1)_j\cdots(\beta_n)_j}\frac{z^j}{j!},\quad (\alpha)_j=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-1),(\alpha)_0=1$$

である．

§3 で $\Lambda(\mu,\sigma^2)$, $\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$ および変換された変数が正規分布に従う場合のいくつかの母数のＵＭＶＵＥとその分散を求めるが，それに必要な量を計算しておく．

<u>定理 2.1.</u> 確率変数 Z と V^2 は，互いに独立に，それぞれ $N(\mu,\xi\sigma^2)$ と $\sigma^2\chi_f^2/f$ に従うものとする．そのとき，つぎの諸公式を得る．

$$E[e^{pZ}]=\exp\left[p\mu+\frac{1}{2}p^2\xi\sigma^2\right], \qquad (4)$$

$$E[g(AV^2)]=\exp\left[\frac{f}{1+f}A\sigma^2\right], \qquad (5)$$

$$E[g^2(AV^2)]=\exp\left[\frac{2f}{1+f}A\sigma^2\right]\cdot{}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2}{(1+f)^2}A^2\sigma^4\right), \qquad (6)$$

$$E[g(AV^2)g(BV^2)]=\exp\left[\frac{f}{1+f}(A+B)\sigma^2\right]\cdot{}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2}{(1+f)^2}AB\sigma^4\right). \qquad (7)$$

証明．(4)は既に知られているし，簡単なので省略する．(5)と(6)は(7)の特別な場合であるので，(7)のみ証明する．証明に必

要な式を列挙すると,

$$ {}_0F_1(c;pz)\,{}_0F_1(c';qz)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(pz)^j}{j!(c)_j}\,{}_2F_1\left(1-c-j,-j;c';\frac{q}{p}\right),\quad (p\geqq q),\quad (8) $$

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2}-\beta;\beta+\frac{1}{2};z^2\right)=(1+z^2)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\beta+\frac{1}{2};\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2\right),\quad (9) $$

$$ E[V^{2p}]=\frac{2^p\,\Gamma(f/2+p)}{f^p\,\Gamma(f/2)}\sigma^{2p} \qquad (10) $$

である. これらを使うと,

$$ \begin{aligned} E[g(AV^2)g(BV^2)] &= E\left[{}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2A}{2(1+f)}V^2\right){}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2B}{2(1+f)}V^2\right)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^jA^j\sigma^{2j}}{j!(1+f)^j}\left(\frac{A+B}{A}\right)^j\left\{\sum_{k=0}^{[j/2]}\frac{j!}{k!(f/2)_k(j-2k)!}\left(\frac{AB}{(A+B)^2}\right)^k\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(f/2)_k}\left(\frac{AB}{(A+B)^2}\right)^k\left\{\sum_{j=2k}^{\infty}\frac{f^j\sigma^{2j}}{(j-2k)!(1+f)^j}(A+B)^j\right\} \\ &= \exp\left[\frac{f}{1+f}(A+B)\sigma^2\right]\cdot{}_0F_1\left(\frac{f}{2};\frac{f^2}{(1+f)^2}AB\sigma^4\right) \end{aligned} $$

を得る.

§3　いくつかの場合

Case 1 ($\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$ の場合).　$X_1,\cdots,X_n$ を i.i.d. $\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数とし, 母数としては,

$$ \theta_{\alpha,\beta,\gamma}\equiv(1-\delta)^{\gamma}\exp[\alpha\mu+\beta\sigma^2] \qquad (\gamma:\text{正整数},\ \alpha,\beta:\text{実数}) $$

$$ \theta\equiv\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\theta_{\alpha,\beta,\gamma} \qquad (C_{\alpha,\beta,\gamma}:\text{実数}) $$

を考える. 非零の個数を n_1 とするならば, つぎの定理を得る

.

定理 3.1.　$\theta_{\alpha,\beta,\gamma}$ の UMVUE は,

$$ \widehat{\theta_{\alpha,\beta,\gamma}}(n_1,\bar{Y},V^2)=\begin{cases}\dfrac{n_{1(\gamma)}}{n_{(\gamma)}}e^{\alpha\bar{Y}}\,{}_0F_1\left(\dfrac{n_1-1}{2};\dfrac{(n_1-1)(2n_1\beta-\alpha^2)}{4n_1}V^2\right), & n_1\geqq\gamma \\ 0 & ,\ n_1<\gamma\end{cases} \qquad (11) $$

であり, その分散は,

$$\mathrm{Var}[\widehat{\theta_{\alpha,\beta,\gamma}}] \tag{12}$$
$$= e^{2\alpha\mu+2\beta\sigma^2}\left[\frac{1}{n_{(\gamma)}^2}\sum_{k=\gamma}^{n}\binom{n}{k}(1-\delta)^k\delta^{n-k}k_{(\gamma)}^2 e^{\frac{1}{k}\alpha^2\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{k-1}{2};\frac{(2k\beta-\alpha^2)^2}{4k^2}\sigma^4\right)-(1-\delta)^{2\gamma}\right]$$

である．ただし，非零の X_i に対して，$Y_i=\log X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}Y_i$，$V^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i-\overline{Y})^2$，$(n_1\geqq 2)$，$V^2=0,(n_1=0,1)$，${}_0F_1(\cdot;0)=1$，$n_{(\gamma)}=n(n-1)\cdots(n-\gamma+1)$ である．

<u>定理3.2.</u> θ のUMVUEは，

$$\hat{\theta}=\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,\widehat{\theta}_{\alpha,\beta,\gamma} \tag{13}$$

であり，その分散は，

$$\mathrm{Var}[\hat{\theta}] \tag{14}$$
$$=\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)}C_{\alpha,\beta,\gamma}^2 e^{2\alpha\mu+2\beta\sigma^2}\left[\frac{1}{n_{(\gamma)}^2}\sum_{j=\gamma}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j_{(\gamma)}^2 e^{\frac{1}{j}\alpha^2\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};\frac{(2j\beta-\alpha^2)^2}{4j^2}\sigma^4\right)-(1-\delta)^{2\gamma}\right]$$
$$+2\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\neq(\alpha',\beta',\gamma')}C_{\alpha,\beta,\gamma}C_{\alpha',\beta',\gamma'}e^{(\alpha+\alpha')\mu+(\beta+\beta')\sigma^2}\left[\frac{1}{n_{(\gamma)}n_{(\gamma')}}\sum_{j=\max(\gamma,\gamma')}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j_{(\gamma)}j_{(\gamma')}\times\right.$$
$$\left.e^{\frac{1}{j}\alpha\alpha'\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};\frac{1}{4j^2}(2j\beta-\alpha^2)(2j\beta'-\alpha'^2)\sigma^4\right)-(1-\delta)^{\gamma+\gamma'}\right]$$

である．

略証．証明はほとんど直接的であり，Aitchison & Brown [1] P.96 をまねればよいが，

$$E[n_{1(\gamma)}]=n_{(\gamma)}(1-\delta)^\gamma$$

であって，$E[\widehat{\theta_{\alpha,\beta,\gamma}}^2]$ と $E[\widehat{\theta_{\alpha,\beta,\gamma}}\,\widehat{\theta_{\alpha',\beta',\gamma'}}]$ を求めるのに，それぞれ．(6)と(7)を使う．

<u>注意3.1.</u> $\Delta(\delta,\mu,\sigma^2)$ の平均 K と分散 ρ^2 のUMVUE k と r^2 の分散について，Aitchison & Brown [1] は，$1/n$ の項まで展開して求めている．すなわち，

$$Var[k] \tag{15}$$
$$= e^{2\mu+\sigma^2}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j^{-2}e^{\frac{1}{j}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};\frac{(j-1)^2}{4j^2}\sigma^4\right)-(1-\delta)^2\right]$$
$$\cong e^{2\mu+\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}(1-\delta)\left\{\delta+\frac{1}{2}\sigma^2(\sigma^2+2)\right\},$$

$$Var[r^2] \tag{16}$$
$$= e^{4\mu+4\sigma^2}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j^{-2}e^{\frac{4}{j}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};4\left(1-\frac{1}{j}\right)^2\sigma^4\right)-(1-\delta)^2\right]$$
$$+e^{4\mu+2\sigma^2}\left[\frac{1}{n^2(n-1)^2}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j^{-2}(j-1)^2e^{\frac{4}{j}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};\left(1-\frac{2}{j}\right)^2\sigma^4\right)-(1-\delta)^4\right]$$
$$-2e^{4\mu+3\sigma^2}\left[\frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(1-\delta)^j\delta^{n-j}j^{-2}(j-1)e^{\frac{4}{j}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{j-1}{2};2\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)\sigma^4\right)-(1-\delta)^3\right]$$
$$\cong e^{4\mu+2\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}(1-\delta)\left\{\delta(e^{\sigma^2}-2+2\delta)^2+4\sigma^2(e^{\sigma^2}-1+\delta)^2+2\sigma^4(2e^{\sigma^2}-1+\delta)^2\right\}.$$

これらの漸近式の精度は，表２～５と表７～10の通りである．

<u>Case 2（$\Lambda(\mu,\sigma^2)$ の場合）.</u> Case 1で，特に，$X_1,\cdots,X_n$ が i.i.d. $\Lambda(\mu,\sigma^2)$ に従うときを考えて，母数を，

$$\theta_{\alpha,\beta}\equiv exp[\alpha\mu+\beta\sigma^2],\qquad(\alpha,\beta:\text{実数})$$
$$\theta^*\equiv\sum_{(\alpha,\beta)}C_{\alpha,\beta}\,\theta_{\alpha,\beta},\qquad(C_{\alpha,\beta}:\text{実数})$$

とすると，定理3.1および3.2の直接の結果として，つぎの系を得る．

<u>系3.1.</u> $\theta_{\alpha,\beta}$ のＵＭＶＵＥは，

$$\widehat{\theta_{\alpha,\beta}}(\bar{Y},V^2)=e^{\alpha\bar{Y}}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{(n-1)(2n\beta-\alpha^2)}{4n}V^2\right) \tag{17}$$

であって，その分散は，

$$Var[\widehat{\theta_{\alpha,\beta}}]=\theta_{\alpha,\beta}^2\left[e^{\frac{\alpha^2}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{(2n\beta-\alpha^2)^2}{4n^2}\sigma^4\right)-1\right] \tag{18}$$

である．

系 3.2. θ^* の UMVUE は,

$$\widehat{\theta^*} = \sum_{(\alpha,\beta)} C_{\alpha,\beta}\widehat{\theta_{\alpha,\beta}} \tag{19}$$

であって，その分散は,

$$\begin{aligned} Var[\widehat{\theta^*}] &= \sum_{(\alpha,\beta)} C_{\alpha,\beta}^2 e^{2\alpha\mu+2\beta\sigma^2}\left[e^{\frac{\alpha^2}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{(2n\beta-\alpha^2)^2}{4n^2}\sigma^4\right)-1\right] \\ &+2\sum_{(\alpha,\beta)\neq(\alpha',\beta')} C_{\alpha,\beta}C_{\alpha',\beta'}e^{(\alpha+\alpha')\mu+(\beta+\beta')\sigma^2}\left[e^{\frac{\alpha\alpha'}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{1}{4n^2}(2n\beta-\alpha^2)(2n\beta'-\alpha'^2)\sigma^4\right)-1\right] \end{aligned} \tag{20}$$

である.

注意 3.2. $\Lambda(\mu,\sigma^2)$ の平均 $\mu_1'=\theta_{1,1/2}$ と，分散 $\mu_2=\theta_{2,2}-\theta_{2,1}$ の UMVUE の分散について，Finney[5] は，それぞれ，$1/n^2$ の項までと，$1/n$ の項まで求めた．$\widehat{\theta_{\alpha,\beta}}$ の分散を $1/n^3$ の項まで展開してみると,

$$\begin{aligned} Var[\widehat{\theta_{\alpha,\beta}}] \cong \theta_{\alpha,\beta}^2\Big[&\frac{1}{n}\sigma^2(\alpha^2+2\beta^2\sigma^2)+\frac{1}{n^2}\sigma^4\Big\{\left(\frac{1}{2}\alpha^4-2\alpha^2\beta+2\beta^2\right)+2\alpha^2\beta^2\sigma^2+2\beta^4\sigma^4\Big\} \\ &+\frac{1}{n^3}\sigma^4\Big\{\frac{1}{2}(2\beta-\alpha^2)^2+\left(\frac{1}{6}\alpha^6+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^4\beta\right)\sigma^2+(\alpha^4\beta^2-4\alpha^2\beta^3)\sigma^4+2\alpha^2\beta^4\sigma^6+\frac{4}{3}\beta^6\sigma^8\Big\}\Big] \end{aligned} \tag{21}$$

を得る．また，$\widehat{\mu_2}$ の分散を $1/n^2$ の項まで展開してみると,

$$\begin{aligned} Var[\widehat{\mu_2}] &= e^{4\mu+2\sigma^2}\Big[e^{2\sigma^2}\Big\{e^{\frac{4}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{4(n-1)^2}{n^2}\sigma^4\right)-1\Big\} \\ &\qquad+e^{\frac{4}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{(n-2)^2}{n^2}\sigma^4\right)-1-2e^{\sigma^2}\Big\{e^{\frac{4}{n}\sigma^2}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2};\frac{2(n-1)(n-2)}{n^2}\sigma^4\right)-1\Big\}\Big] \\ &\cong e^{4\mu+2\sigma^2}\Big[\frac{2}{n}\sigma^2\{2(e^{\sigma^2}-1)^2+\sigma^2(2e^{\sigma^2}-1)^2\} \\ &\qquad+\frac{2}{n^2}\sigma^4\{1+4\sigma^2(2e^{\sigma^2}-1)^2+\sigma^4(4e^{\sigma^2}-1)^2\}\Big] \end{aligned} \tag{22}$$

を得る.

表1を見て分るように，平均に関しては，Finney[5] の近似式は Mehran[10] が指摘しているように非常に良い．これは，$1/n^2$ の項まで展開しているためである．しかし，分散に関し

ては，$1/n$ の項までしか展開していないため，精度はそれ程良くはない．$1/n^2$ の項までの近似を用いると，表6から良い近似になっていることが分る．

Case 3（対数正規線型モデルの場合）. full rank 対数正規線型モデルにおいて，a を正規方程式

$$(X'X)a = X'y$$

の解とすると，

1) $z = c'a$ は，$\zeta = c'\alpha$ の最良線型不偏推定量（BLUE）で，$z \sim N(c'\alpha, \sigma_z^2)$ である．ここで，$\sigma_z^2 = \sigma^2 v_z$，$v_z = c'(X'X)^{-1}c$，

2) σ^2 の一つの不偏推定量は，

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{m}(y - Xa)'(y - Xa), \quad m = n - k$$

であって，$\widehat{\sigma^2} \sim \sigma^2 \chi_m^2/m$ で，$\widehat{\sigma^2}$ と z とは，互いに独立である．ここで，$k = \operatorname{rank} X$，

が知られている．

そのとき，つぎを得る．

定理 3.3. $\theta_{\gamma,\delta} \equiv \exp[\gamma\zeta + \delta\sigma^2]$ の UMVUE は，

$$\widehat{\theta_{\gamma,\delta}}(z, \widehat{\sigma^2}) = e^{\gamma z} {}_0F_1\left(\frac{m}{2}; \frac{m}{2}\left(\delta - \frac{1}{2}\gamma^2 v_z\right)\widehat{\sigma^2}\right) \tag{23}$$

であって，その分散は，

$$Var[\widehat{\theta_{\gamma,\delta}}] = \theta_{\gamma,\delta}^2\left[e^{\gamma^2\sigma_z^2} {}_0F_1\left(\frac{m}{2}; \left(\delta - \frac{1}{2}\gamma^2 v_z\right)^2\sigma^4\right) - 1\right] \tag{24}$$

である．

証明は簡単なので省略する．この分散の表現は，Bradu & Mundlak [3] よりも簡潔に見える．また，母数 $\theta^* \equiv \sum_{(\gamma,\delta)} c_{\gamma,\delta}\theta_{\gamma,\delta}$ のUMVUEとその分散は，系3.2とほとんど平行的であるので省略する．

Case 4（2つの対数正規母集団の場合）. Crow [4] は，$X_1, \cdots, X_m$ を i.i.d. $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従い，$Y_1, \cdots, Y_n$ を i.i.d. $\Lambda(\mu', \sigma^2)$ に従う確率変数とするとき，$\rho \equiv E[Y]/E[X] = \exp[\mu' - \mu]$ のUMVUEを求めた．しかし，Finney [5] の方法を踏襲しているため，表現方法が簡潔でない．超幾何関数を用いてUMVUEを表現し，さらにその分散を求めてみるとつぎのようになる

.

定理3.4. ρ のUMVUEは，

$$\hat{\rho}(\bar{U}, \bar{V}, S^2) = e^{\bar{V}-\bar{U}}\,{}_0F_1\left(\frac{m+n-2}{2}; -\frac{(m+n)(m+n-2)}{4mn}S^2\right) \tag{25}$$

であって，その分散は，

$$Var[\hat{\rho}] = \rho^2\left[e^{\frac{m+n}{mn}\sigma^2}\,{}_0F_1\left(\frac{m+n-2}{2}; \frac{(m+n)^2}{4m^2n^2}\sigma^4\right) - 1\right] \tag{26}$$

である．ここで，$\bar{U} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\log X_i)$, $\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log Y_i)$, $S^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{U})^2 + \sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{V})^2\right]$ である．

証明. $\bar{V} - \bar{U} \sim N(\mu' - \mu, \frac{m+n}{mn}\sigma^2)$, $S^2 \sim \sigma^2\chi^2_{m+n-2}/(m+n-2)$, $(\bar{V} - \bar{U} \perp\!\!\!\perp S^2)$ より，(4)(5)(6) を組合せればよい．

定理3.5. 上と同じ状況のもとで，$\xi \equiv Var[Y]/Var[X] = \exp[2(\mu' - \mu)]$ のUMVUEは，

$$\hat{\xi}(\bar{U}, \bar{V}, S^2) = e^{2(\bar{V}-\bar{U})} {}_0F_1\left(\frac{m+n-2}{2}; -\frac{(m+n)(m+n-2)}{mn}S^2\right) \quad (27)$$

であって，その分散は，

$$Var[\hat{\xi}] = \xi^2\left[e^{\frac{4(m+n)}{mn}\sigma^2} {}_0F_1\left(\frac{m+n-2}{2}; \frac{4(m+n)^2}{m^2n^2}\sigma^4\right) - 1\right] \quad (28)$$

である．

つぎに，$X_1, \cdots, X_m$ を i.i.d. $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従い，$Y_1, \cdots, Y_n$ を i.i.d. $\Lambda(\mu', \sigma'^2)$ に従う確率変数とするとき，$\rho \equiv E[Y]/E[X] = \exp[\mu' - \mu + \frac{1}{2}(\sigma'^2 - \sigma^2)]$ のＵＭＶＵＥとその分散を求めてみると，つぎのようになる．

定理 3.6. ρ のＵＭＶＵＥは，

$$\hat{\rho}(\bar{U}, \bar{V}, S_U^2, S_V^2) = e^{\bar{V}-\bar{U}} {}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}; \frac{(n-1)^2}{4n}S_V^2\right) {}_0F_1\left(\frac{m-1}{2}; -\frac{(m+1)(m-1)}{4m}S_U^2\right) \quad (29)$$

であって，その分散は，

$$Var[\hat{\rho}] = \rho^2\left[e^{\frac{\sigma'^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}} {}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}; \frac{(n-1)^2}{4n^2}\sigma'^4\right) {}_0F_1\left(\frac{m-1}{2}; \frac{(m+1)^2}{4m^2}\sigma^4\right) - 1\right] \quad (30)$$

である．ただし，$S_U^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{U})^2$, $S_V^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(V_j - \bar{V})^2$.

Case 5（変換された変数が正規分布に従う場合）．Neyman & Scott [11] は，$X_1, \cdots, X_n$ を i.i.d. 分布関数 F に従う確率変数とし，$Y = f^{-1}(X)$ で変換された確率変数 $Y_1, \cdots, Y_n$ が i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ に従う場合の $\theta \equiv E[X]$ のＵＭＶＵ推定問題を考えた．彼等の論文で，f が recursive type（i.e. $f''(x) = A + Bf(x)$）の場合の θ のＵＭＶＵＥを超幾何関数を使って書けば，

1) $B = 0$ のとき，$\theta = f(\mu) + \frac{1}{2}A\sigma^2$ であって，

$$\hat{\theta}(\hat{\mu}, V^2) = f(\hat{\mu}) + \frac{1}{2}A(1-\lambda^2)V^2, \quad (31)$$

2) $B \neq 0$ のとき，$\theta = f(\mu)e^{\frac{B\sigma^2}{2}} + \frac{A}{B}(e^{\frac{B\sigma^2}{2}} - 1)$ であって，

$$\hat{\theta}(\hat{\mu}, V^2) = {}_0F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{\nu B(1-\lambda^2)}{4}V^2\right)\cdot\left[f(\hat{\mu}) + \frac{A}{B}\right] - \frac{A}{B} \tag{32}$$

となる．ここで，$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ と $V^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2$ は，互いに独立に $N(\mu, \lambda^2\sigma^2)$ と $\sigma^2\chi_\nu^2/\nu$ に従うものとする．

我々は，この問題に関しても，§2の結果を用い，これらUMVUEの分散を求めることができる．すなわち，微分方程式の一般解を用いて，つぎのように書ける．

定理3.7. C_1，C_2 は，定数とする．

1) $B = 0$ のとき，$f(x) = \frac{1}{2}A(x - C_1)^2 + C_2$ であって，

$$Var[\hat{\theta}] = \frac{1}{2}A^2\sigma^4\left\{\lambda^4 + \frac{1}{\nu}(1-\lambda^2)^2\right\} + A^2\lambda^2\sigma^2(\mu - C_1)^2, \tag{33}$$

2) $B > 0$ のとき，$f(x) = c_1 e^{\sqrt{B}x} + c_2 e^{-\sqrt{B}x} - \frac{A}{B}$ であって，

$$\begin{aligned} &Var[\hat{\theta}] \\ &= e^{B\sigma^2(1-\lambda^2)}{}_0F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{1}{4}B^2(1-\lambda^2)^2\sigma^4\right)\left[e^{2B\lambda^2\sigma^2}\left\{c_1 e^{\sqrt{B}\mu} + c_2 e^{-\sqrt{B}\mu}\right\}^2\right. \\ &\quad \left. + 2c_1c_2(1 - e^{2B\lambda^2\sigma^2})\right] - e^{B\sigma^2}\left\{c_1 e^{\sqrt{B}\mu} + c_2 e^{-\sqrt{B}\mu}\right\}^2 \end{aligned} \tag{34}$$

となり，$B < 0$ のときは，$f(x) = c_1 e^{\sqrt{-B}ix} + c_2 e^{-\sqrt{-B}ix} - \frac{A}{B}$ であって，

$$\begin{aligned} &Var[\hat{\theta}] \\ &= e^{B\sigma^2(1-\lambda^2)}{}_0F_1\left(\frac{\nu}{2}; \frac{1}{4}B^2(1-\lambda^2)^2\sigma^4\right)\left[e^{2B\lambda^2\sigma^2}\left\{c_1'\cos\sqrt{-B}\mu + c_2'\sin\sqrt{-B}\mu\right\}^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(c_1'^2 + c_2'^2)(1 - e^{2B\lambda^2\sigma^2})\right] - e^{B\sigma^2}\left\{c_1'\cos\sqrt{-B}\mu + c_2'\sin\sqrt{-B}\mu\right\}^2 \end{aligned} \tag{35}$$

となる．ただし，$c_1' = c_1 + c_2$，$c_2' = (c_1 - c_2)i$．

Hoyle [8] は，$\theta \equiv Var[X]$ のUMVUEを作っているが，

recursive type の場合は，UMVUEとその分散を超幾何関数に基づく方法で表現できるはずであるが，やっかいなので省略する．

Case 6（$\Lambda(\mu,\sigma^2)$の確率点の推定の場合）． $X_1,\cdots,X_n$を i.i.d. $\Lambda(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数とするとき，下側確率 g を与えたときの確率点 $\theta\equiv\exp[\mu+t_g\sigma]$ を推定する問題を考える．ここで，t_gは $U\sim N(0,1)$ としたときの $g=P_r(U\leqq t_g)$ となるような点である．

定理 3.8. θ の UMVUEは，つぎのどれかで求まる．

$$\hat{\theta}(\bar{Y},V^2)$$
$$=e^{\bar{Y}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{k!\,\Gamma((k+n-1)/2)}\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}t_gV\right)^k{}_0F_1\left(\frac{k+n-1}{2};-\frac{n-1}{4n}V^2\right)\right] \quad (36)$$
$$=e^{\bar{Y}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}H_k(\sqrt{n}\,t_g)\frac{(n-1)^{k/2}\,\Gamma((n-1)/2)}{k!\,n^{k/2}\,2^{k/2}\,\Gamma((n-1+k)/2)}V^k\right] \quad (37)$$
$$=e^{\bar{Y}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}{}_1F_1\left(-k;\frac{1}{2};\frac{nt_g^2}{2}\right)\frac{\Gamma((n-1)/2)}{k!\,\Gamma(k+(n-1)/2)}\left(-\frac{n-1}{4n}V^2\right)^k \quad (38)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{n-1}{2}}t_gV\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}\sum_{k=0}^{\infty}{}_1F_1\left(-k;\frac{3}{2};\frac{nt_g^2}{2}\right)\frac{\Gamma(n/2)}{k!\,\Gamma(k+n/2)}\left(-\frac{n-1}{4n}V^2\right)^k\right],$$

ここで，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i)$，$V^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\log X_i-\bar{Y})^2$，$H_k$は，$k$次の Hermite 多項式 $H_k(x)=(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-\frac{x^2}{2}})$ である．

また，$\hat{\theta}$ の分散は，

$$Var[\hat{\theta}]=\theta^2\left[e^{\frac{2}{n}\sigma^2-2t_g\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}W_k\frac{\Gamma((n-1+k)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^k-1\right] \quad (39)$$

である．ここで，

$$W_k=\sum_{r+s=k}\frac{\Gamma^2((n-1)/2)}{\Gamma((n-1+r)/2)\,\Gamma((n-1+s)/2)\,r!\,s!}H_r(\sqrt{n}\,t_g)H_s(\sqrt{n}\,t_g)$$

である．

証明は，直接的であるが面倒なので省略する．UMVUEは，heuristicな方法を用いれば求まる．また，分散式は好ましい表現ではないが，簡潔な式は得られなかった．

BIBLIOGRAPHY

[1] Aitchison,J. & Brown,J.A.C. (1957). The Lognormal Distributions, Cambridge University Press.

[2] Bateman Manuscript Project (1953). Tables of Integral Transforms, Vol.1, A.Erdelyi ed., McGraw-Hill.

[3] Bradu,D. & Mundlak,Y. (1970). Estimation in Lognormal Linear Models, J.Amer.Statist.Assoc., 65, 198-211.

[4] Crow,E.L. (1977). Minimum Variance Unbiased Estimators of the Ratio of Means of Two Lognormal Variates and of Two Gamma Variates, Commun. Statist., 6, 967-975.

[5] Finney,D.J. (1941). On the Distribution of a Variate Whose Logarithm is Normally Distributed, J.R.Statist.Soc.Suppl., 7, 155-161.

[6] Gradshteyn,I.S. & Ryzhik,I.M. (1965). Table of Integrals, Series and Products, Academic Press.

[7] Gray,H.L., Watkins,T.A. & Schucany,W.R. (1973). On the Jackknife Statistic and its Relation to UMVU Estimators in the Normal Case, Commun.Statist., 2, 285-320.

[8] Hoyle,M.H. (1968). The Estimation of Variances after using a Gaussianating Transformation, Ann.Math.Statist., 39, 1125-1143.

[9] Johnson,N.L. & Kotz,S. (1970). Continuous Univariate Distributions-1, Wiley.

[10] Mehran,F. (1973). Variance of the MVUE for the Lognormal Mean, J.Amer. Statist.Assoc., 68, 726-727.

[11] Neyman,J. & Scott,E.L. (1960). Correction for Bias Introduced by a Transformation of Variables, Ann.Math.Statist., 31, 643-655.

Δ-分布の平均のＵＭＶＵＥの分散（μ = 0）

δ = 0

Table 1 （上段：真値，中段：1/n²までの近似，下段：1/n）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	1.01511 E-3	1.02945 E-2	3.62123 E-2	1.00580 E-1	2.62501 E-1
	1.01511 E-3	1.02948 E-2	3.62198 E-2	1.00657 E-1	2.63006 E-1
	1.01510 E-3	1.02907 E-2	3.61132 E-2	9.95795 E-2	2.55823 E-1
50	2.03020 E-4	2.05830 E-3	7.22684 E-3	1.99584 E-2	5.14478 E-2
	2.03020 E-4	2.05830 E-3	7.22691 E-3	1.99590 E-2	5.14519 E-2
	2.03020 E-4	2.05814 E-3	7.22264 E-3	1.99159 E-2	5.11646 E-2
100	1.01510 E-4	1.02911 E-3	3.61238 E-3	9.96864 E-3	2.56536 E-2
	1.01510 E-4	1.02911 E-3	3.61239 E-3	9.96872 E-3	2.56541 E-2
	1.01510 E-4	1.02907 E-3	3.61132 E-3	9.95795 E-3	2.55823 E-2

δ = 0.2

Table 2 （上段：真値，下段：1/nまでの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	1.69729 E-2	2.57431 E-2	4.95319 E-2	1.06760 E-1	2.47167 E-1
	1.69729 E-2	2.57394 E-2	4.94350 E-2	1.05781 E-1	2.40625 E-1
50	3.39458 E-3	5.14803 E-3	9.89118 E-3	2.11984 E-2	4.84071 E-2
	3.39458 E-3	5.14787 E-3	9.88700 E-3	2.11561 E-2	4.81250 E-2
100	1.69729 E-3	2.57398 E-3	4.94455 E-3	1.05887 E-2	2.41337 E-2
	1.69729 E-3	2.57394 E-3	4.94350 E-3	1.05781 E-2	2.40625 E-2

δ = 0.4

Table 3 （上段：真値，下段：1/nまでの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	2.48503 E-2	3.24382 E-2	5.25777 E-2	9.98647 E-2	2.13744 E-1
	2.48503 E-2	3.24346 E-2	5.24845 E-2	9.89233 E-2	2.07444 E-1
50	4.97005 E-3	6.48708 E-3	1.05011 E-2	1.98267 E-2	4.17690 E-2
	4.97005 E-3	6.48692 E-3	1.04969 E-2	1.97847 E-2	4.14887 E-2
100	2.48503 E-3	3.24350 E-3	5.24951 E-3	9.90297 E-3	2.08153 E-2
	2.48503 E-3	3.24346 E-3	5.24845 E-3	9.89233 E-3	2.07444 E-2

$\delta = 0.6$　　Table 4 (上段: 真値, 下段: $1/n$ までの近似)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	2.46472 E-2 2.46472 E-2	3.03797 E-2 3.03765 E-2	4.53461 E-2 4.52619 E-2	7.98597 E-2 7.90074 E-2	1.62004 E-1 1.56279 E-1
50	4.92945 E-3 4.92945 E-3	6.07545 E-3 6.07529 E-3	9.05648 E-3 9.05238 E-3	1.58430 E-2 1.58015 E-2	3.15325 E-2 3.12558 E-2
100	2.46472 E-3 2.46472 E-3	3.03769 E-3 3.03765 E-3	4.52724 E-3 4.52619 E-3	7.91131 E-3 7.90074 E-3	1.56984 E-2 1.56279 E-2

$\delta = 0.8$　　Table 5 (上段: 真値, 下段: $1/n$ までの近似)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	1.16368 E-2 1.63638 E-2	1.95672 E-2 1.95649 E-2	2.78256 E-2 2.77670 E-2	4.66280 E-2 4.60329 E-2	9.11534 E-2 8.71312 E-2
50	3.27276 E-3 3.27276 E-3	3.91314 E-3 3.91299 E-3	5.55734 E-3 5.55341 E-3	9.24631 E-3 9.20659 E-3	1.76915 E-2 1.74262 E-2
100	1.63638 E-3 1.63638 E-3	1.95653 E-3 1.95649 E-3	2.77773 E-3 2.77670 E-3	4.61366 E-3 4.60329 E-3	8.78225 E-3 8.71312 E-3

Δ-分布の分散のUMVUEの分散($\mu = 0$)

$\delta = 0$　　Table 6 (上段: 真値, 中段: $1/n^2$ までの近似, 下段: $1/n$)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	2.40074 E-5 2.37719 E-5 2.16447 E-5	3.45867 E-3 3.43160 E-3 3.12114 E-3	7.35907 E-2 7.33052 E-2 6.39734 E-2	1.10679 E00 1.10031 E00 8.64986 E-1	1.67768 E+1 1.61229 E+1 1.06527 E+1
50	4.41576 E-6 4.41403 E-6 4.32894 E-6	6.36841 E-5 6.36647 E-4 6.24228 E-4	1.31698 E-2 1.31680 E-2 1.27946 E-2	1.82474 E-1 1.82410 E-1 1.72997 E-1	2.35575 E00 2.34935 E00 2.13055 E00
100	2.18596 E-6 2.18574 E-6 2.16447 E-6	3.15243 E-4 3.15219 E-4 3.12114 E-4	6.49088 E-3 6.49066 E-3 6.39734 E-3	8.88601 E-2 8.88519 E-2 8.64986 E-2	1.12079 E00 1.11997 E00 1.06527 E00

$\delta = 0.2$

Table 7（上段：真値，下段：1/n までの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	6.48978 E-3	1.24956 E-2	9.89850 E-2	1.18920 E00	1.67439 E+1
	5.84949 E-3	1.08757 E-2	8.50739 E-2	9.11230 E-1	1.00253 E+1
50	1.19342 E-3	2.23498 E-3	1.75544 E-2	1.93166 E-1	2.25036 E00
	1.16990 E-3	2.17513 E-3	1.70148 E-2	1.82246 E-1	2.00505 E00
100	5.90770 E-4	1.10239 E-3	8.64185 E-3	9.38437 E-2	1.06286 E00
	5.84949 E-4	1.08757 E-3	8.50739 E-3	9.11230 E-2	1.00253 E00

$\delta = 0.4$

Table 8（上段：真値，下段：1/n までの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	2.69228 E-3	1.21017 E-2	1.10683 E-1	1.19608 E00	1.61342 E+1
	1.31982 E-3	9.57281 E-3	9.44587 E-2	8.90946 E-1	8.83893 E00
50	3.14381 E-4	2.00813 E-3	1.95320 E-2	1.90385 E-1	2.03401 E00
	2.63963 E-4	1.91456 E-3	1.88917 E-2	1.78189 E-1	1.76779 E00
100	1.44459 E-4	9.80457 E-4	9.60562 E-3	9.21356 E-2	9.49164 E-1
	1.31982 E-4	9.57281 E-4	9.44587 E-3	8.90946 E-2	8.83893 E-1

$\delta = 0.6$

Table 9（上段：真値，下段：1/n までの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	3.05937 E-3	1.55436 E-2	1.15079 E-1	1.09232 E00	1.45270 E+1
	1.70921 E-3	1.32752 E-2	9.95580 E-2	7.81505 E-1	6.93987 E00
50	3.91440 E-4	2.74007 E-3	2.05705 E-2	1.69614 E-1	1.67717 E00
	3.41841 E-4	2.65504 E-3	1.99116 E-2	1.56301 E-1	1.38797 E00
100	1.83195 E-4	1.34860 E-3	1.01211 E-2	8.14802 E-2	7.64542 E-1
	1.70921 E-4	1.32752 E-3	9.95580 E-3	7.81505 E-2	6.93987 E-1

$\delta = 0.8$

Table 10（上段：真値，下段：1/n までの近似）

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	7.21916 E-3	1.86865 E-2	9.30267 E-2	7.60407 E-1	1.02137 E+1
	6.62394 E-3	1.76562 E-2	8.24779 E-2	5.19351 E-1	4.09659 E00
50	1.34666 E-3	3.57396 E-3	1.71135 E-2	1.18059 E-1	1.13656 E00
	1.32479 E-3	3.53125 E-3	1.64956 E-2	1.03870 E-1	8.19319 E-1
100	6.67806 E-4	1.77631 E-3	8.40634 E-3	5.55340 E-2	4.86614 E-1
	6.62394 E-4	1.76562 E-3	8.24779 E-3	5.19351 E-2	4.09659 E-1